CORRIGE DU FICHIER « PREPARER L'ANNEE DE SECONDE »

Partie A : CALCULS FRACTIONNAIRES

Exercice 1 : Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

A = $\frac{-5}{7}+\frac{4}{21}$	B = $\frac{5}{12}-\frac{3}{8}$	C = $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$	D = $\frac{-7}{9}\div\frac{6}{-14}$	E = $\frac{2}{15}+\frac{18}{5}\times\frac{35}{4}$

$$A=-\frac{5}{7}+\frac{4}{21}$$
$$A=-\frac{5\times3}{7\times3}+\frac{4}{21}$$
$$A=-\frac{15}{21}+\frac{4}{21}$$
$$A=-\frac{11}{21}$$

$$B=\frac{5}{12}-\frac{3}{8}$$
$$B=\frac{5\times2}{12\times2}-\frac{3\times3}{8\times3}$$
$$B=\frac{10}{24}-\frac{9}{24}$$
$$B=\frac{1}{24}$$

$$C=\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}$$
$$C=\frac{\cancel{2}\times1}{3\times\cancel{2}\times4}$$
$$C=\frac{1}{12}$$

$$D=-\frac{7}{9}\div\frac{6}{-14}$$
$$D=-\frac{7}{9}\times\frac{-14}{6}$$
$$D=\frac{7\times\cancel{2}\times7}{9\times\cancel{2}\times3}$$
$$D=\frac{49}{27}$$

$$E=\frac{2}{15}+\frac{18}{5}\times\frac{35}{4}$$
$$E=\frac{2}{15}+\frac{\cancel{2}\times9}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}\times7}{\cancel{2}\times2}$$
$$E=\frac{2}{15}+\frac{63}{2}$$
$$E=\frac{2\times2}{15\times2}+\frac{63\times15}{2\times15}$$
$$E=\frac{949}{30}$$

***Exercice 2** :

Pierre, Jules et Thomas se partagent la fortune de leur père.

Pierre reçoit le tiers de cette fortune, Jules les deux cinquièmes et Thomas hérite du reste.

Quelle fraction de la fortune de son père reçoit Thomas ?

__Solution :__

Choix de l'inconnue : soit x la fortune du père.

Part de Pierre : $\frac{1}{3}x$;

Part de Jules : $\frac{2}{5}x$

Part de Thomas : y

Mise en équation du problème :

$$y=x-\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}x \qquad \Leftrightarrow y=x\times\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)$$
$$\Leftrightarrow y=x\times\left(\frac{15}{15}-\frac{1\times5}{3\times5}-\frac{2\times3}{5\times3}\right)$$
$$\Leftrightarrow y=x\times\left(\frac{15-5-6}{15}\right)$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{15}x$$

Thomas reçoit $\frac{4}{15}$ de la fortune de son père.

Partie B : DEVELOPPER - FACTORISER

Exercice 1 : Parmi les expressions suivantes, souligner en bleu les sommes et en vert les produits :

$x+3\times5$; $5x+7$; $4(3x+6)$; $(6x+4)\times5$; $(4x-5)-(7x+3)$; $(x+6)^2$

Exercice 2 : Parmi les expressions littérales proposées, trouver dans chaque cas celle qui convient et la recopier dans le tableau :

❶ $\frac{2+x}{2}$; ❷ x^2 ; ❸ $2+\frac{x}{2}$; ❹ $2+x$; ❺ $2x$; ❻ $2x+3$; ❼ $x+3\times2$; ❽ $2(x+3)$

	Expression choisie
La somme de 2 et de x	N°4 : $2+x$
Le double de x	N°5 : $2x$
Le carré de x	N°2 : x^2
La somme de 2 et de la moitié de x	N°3 : $2+\frac{x}{2}$
La moitié de la somme de 2 et de x	N°1 : $\frac{2+x}{2}$
La somme de x et du produit de 3 par 2	N°7 : $x+3\times2$
Le produit de 2 par la somme de x et de 3	N°8 : $2(x+3)$
La somme du produit de 2 par x et de 3	N°6 : $2x+3$

Exercice 3 :
Développer et réduire les expressions suivantes.

$A(x) = (2x - 3)(5x - 4)$
$A(x) = 10x^2 - 8x - 15x + 12$
$A(x) = 10x^2 - 23x + 12$

$B(x) = 2x(5x - 3) - 7$
$B(x) = 10x^2 - 6x - 7$

$C(x) = 3x - (x - 1) - (x + 7)(x + 3)$
$C(x) = 3x - x + 1 - x^2 - 3x - 7x - 21$
$C(x) = -x^2 - 8x - 20$

$D(x) = (x + 5)^2$
$D(x) = (x + 5)(x + 5)$
$D(x) = x^2 + 5x + 5x + 25$
$D(x) = x^2 + 10x + 25$

$E(x) = (6 + 7x)(6 - 7x)$
$E(x) = 6^2 - (7x)^2$
$E(x) = 36 - 49x^2$

$F(x) = (4x - 1)^2$
$F(x) = (4x - 1)(4x - 1)$
$F(x) = 16x^2 - 4x - 4x^{\circ}1$
$F(x) = 16x^2 - 8x + 1$

Exercice 4 :
Factoriser les expressions suivantes.

$A(x) = x^2 + 2x$
(Présence d'un facteur commun)
$A(x) = \mathbf{x} \times + \mathbf{x} \times 2$
$A(x) = \mathbf{x} \times (x + 2)$
$A(x) = x(x + 2)$

$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)^2$
$B(x) = 7x(x - 4) + (x - 4)(x - 4)$
$B(x) = (\mathbf{x - 4}) \times (7x + (x - 4))$
$B(x) = (\mathbf{x - 4}) \times (7x + x - 4)$
$B(x) = (x - 4)(8x - 4)$

$C(x) = 9x^2 - 12x$
$C(x) = \mathbf{3x} \times 3x - \mathbf{3x} \times 4$
$C(x) = \mathbf{3x} \times (3x - 4)$
$C(x) = 3x(3x - 4)$

$D(x) = (\mathbf{x + 1})(2x + 5) - (\mathbf{x + 1})(3x - 4)$
$D(x) = (\mathbf{x + 1})((2x + 5) - (3x - 4))$
$D(x) = (\mathbf{x + 1})(2x + 5 - 3x + 4)$ *(Attention au signe "-" devant une parenthèse)*
$D(x) = (x + 1)(-x + 9)$

$E(x) = 16x^2 - 1$ **(On reconnait l'identité $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$)**
$E(x) = (4x)^2 - 1^2$
$E(x) = (4x + 1)(4x - 1)$

$F(x) = 25 - (2x - 1)^2$
$F(x) = 5^2 - (2x - 1)^2$
$F(x) = (5 + (2x - 1)) \times (5 - (2x - 1))$
$F(x) = (5 + 2x - 1)(5 - 2x + 1)$
$F(x) = (2x + 4)(-2x + 6)$

$G(x) = (2 - x)(3x + 1) + (3x + 1)$
$G(x) = (2 - x) \times (\mathbf{3x + 1}) + (\mathbf{3x + 1}) \times 1$
$G(x) = (\mathbf{3x + 1}) \times (2 - x + 1)$
$G(x) = (3x + 1)(-x + 3$

Exercice 5 : Effectuer sans la calculatrice et astucieusement les calculs suivants :
(Rédiger les étapes intermédiaires) :

$A = 48 \times 99$
$A = 48 \times (100 - 1)$
$A = 48 \times 100 - 48 \times 1$
$A = 4800 - 48$
$A = 4752$

$B = 57 \times 101$
$B = 57 \times (100 + 1)$
$B = 57 \times 100 + 57 \times 1$
$B = 5700 + 57$
$B = 5757$

$C = 101^2$
$C = (100 + 1)^2$
$C = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$
$C = 10\,000 + 200 + 1$
$C = 10\,201$

Partie C : EQUATIONS

Exercice n°1 Résoudre les équations suivantes : $E_1 : 3x-1=-13$ $3x-1+1=-13+1$ $3x=-12$ on divise par 3 les deux membres de l'égalité $x=-\frac{12}{3}$ $x=-4$ La solution de l'équation est -4 $E_2 : -2x+5=8$ $-2x+5-5=8-5$ $-2x=3$ (On divise par -2 les deux membres de l'égalité) $x=\frac{3}{-2}$ $x=-1{,}5$ La solution de l'équation est $-1{,}5$ $E_5 : 11x-3=2x+9$ $11x-3+3-2x=2x+9+3-2x$ $9x=12$ (On divise par 9 les deux membres de l'égalité) $x=\frac{12}{9}=\frac{4\times 3}{3\times 3}=\frac{4}{3}$ La solution de l'équation est $\frac{4}{3}$ $E_6 : \frac{x}{7}=-\frac{7}{4}$ (On multiplie par 7 les deux membres de l'égalité) $\frac{x}{7}\times 7=-\frac{7}{4}\times 7$ $x=-\frac{49}{4}$ La solution de l'équation est $-\frac{49}{4}$	$E_3 : 5x=0$ (On divise par 5 les deux membres de l'égalité) $x=\frac{0}{5}$ $x=0$ La solution de l'équation est 0 $E_4 : 4-x=7$ $4-x-4=7-4$ $-x=3$ $x=-3$ La solution de l'équation est -3 $E_7 : (-2x-5)(3x+2)=0$ On reconnait une équation-produit nul. **Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul** $\mathbf{-2x-5=0}$ **ou** $\mathbf{3x+2=0}$ $\mathbf{-2x=5}$ **ou** $\mathbf{3x=-2}$ $\mathbf{x=\frac{5}{-2}}$ **ou** $\mathbf{x=-\frac{2}{3}}$ Les solutions de l'équation sont $x=-\frac{5}{2}$ et $x=-\frac{2}{3}$.

*Exercice 2

A un semi-marathon, les organisateurs décident de donner une somme d'argent aux trois premiers. Ils se mettent d'accord pour attribuer $\frac{3}{5}$ de la somme totale au vainqueur, $\frac{1}{3}$ au second et 200 € au troisième.

Quelle est la somme totale qu'ils décident de distribuer ?

Exprimons la part du troisième : $1-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}$

Soit x, la somme totale ; on a donc $\left(1-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)\times x=200$

Or ; $1-\frac{3}{5}-\frac{1}{3}=\frac{15}{15}-\frac{9}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$ donc $\frac{1}{15}\times x=200$ soit $x=200\times 15$ donc $x=3\ 000$

La somme totale qu'ils décident de distribuer est 3 000 €.

Exercice 3 : On donne le programme de calcul suivant.

• Choisir un nombre • Ajouter 3 • Calculer le carré du résultat • Soustraire 9	**1.** Montrer que, si on choisit le nombre 4, le résultat obtenu est 40. **2.** Exprimer, en fonction du nombre x de départ, le résultat obtenu avec ce programme de calcul. En développant et en réduisant cette expression, montrer que le résulat du programme est $x^2 + 6x$. **3.** Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ? Justifier.

1- Montrer que, si on choisit le nombre 4, le résultat obtenu est 40.

$$4 \to 4+3=7 \to 7^2=49 \to 49-9=40$$

2- Exprimer, en fonction du nombre x de départ, le résultat obtenu avec ce programme de calcul. En développant et en réduisant cette expression, montrer que le résultat du programme est x^2+6x.

$$x \to x+3 \to (x+3)^2 \to (x+3)^2-9$$

$$(x+3)^2-9=(x+3)(x+3)-9=x^2+3x+3x+9-9=x^2+6x$$

3- Quels nombres peut-on choisir pour que le résultat obtenu soit 0 ? Justifier.
Il faut résoudre $x^2+6x=0$; factorisons cette expression. $x \times x + 6 \times x = 0$

$$(x+6) \times x = 0$$

On reconnait une équation produit nul. Or, un produit de facteurs est nul si l'un de ses facteurs est nul. Donc $x = 0$ ou $x+6=0$ soit $x=-6$
Les solutions de l'équation sont 0 et -6.

Partie D : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Exercice n°1
On considère une fonction f telle que $f(2) = 5$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
Répondre en barrant les mauvaises réponses parmi :"VRAI", "FAUX" et "On ne peut rien dire".

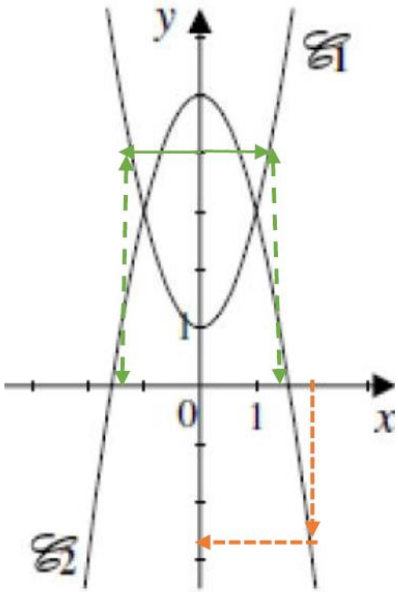
1.	L'image de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
2.	L'image de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
3.	Un antécédent de 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
4.	Un antécédent de 2 par la fonction f est 5.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
5.	Un nombre dont l'image est 5 par la fonction f est 2.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
6.	2 a pour image 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

7	Un nombre dont l'image est 7 par la fonction f est 2	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

Car l'image de 2 est 5 et qu'il n'y a qu'une seule image possible pour 2

8.	5 a pour antécédent 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
9.	2 a pour antécédent 5 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
10.	2 a pour image 7 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
11.	5 a pour image 2 par la fonction f.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire
12.	Le point de coordonnées (2 ; 5) appartient à $\mathscr{C}$.	VRAI	FAUX	On ne peut rien dire

Exercice 2
Sur le graphique ci-contre $\mathscr{C}_1$ la courbe représente une fonction f et la courbe $\mathscr{C}_2$ représ
une fonction g.
Répondre aux questions par lecture graphique (avec la précision permise par le tracé).



1- L'image de 2 par la fonction g est $g(2) \approx -2{,}6$

2- Les antécédents de 4 par la fonction g sont environ :
$-1{,}3$ et $1{,}3$

3- Les valeurs de x telles que $f(x) = g(x)$ sont environ :
-1 et 1 : ce sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes.

4- L'image de ces valeurs par f et g :
$f(1) = g(1) \approx 3$ et $f(-1) = g(-1) \approx 3$

Exercice 3

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = 4x^2$

1- L'image de – 3 par la fonction f est $f(-3) = 2 \times (-3) - 4 = -10$

2- Un antécédent de 24 par la fonction f est le nombre x tels que $f(x) = 24$ c'est-à-dire les solutions de l'équation $2x - 4 = 24$ donc $2x = 28$ donc $x = 14$.

3- L'image de 3 par la fonction g est $g(3) = 4 \times 3^2 = 4 \times 9 = 36$.

4. Les antécédents de 8 par la fonction g sont les nombres réels x tels que $g(x) = 8$.

On résout $4x^2 = 8$, ce qui équivaut à $x^2 = 2$.

On reconnaît une équation $x^2 = a$, avec $a = 2$. a est strictement positif donc l'équation a deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. L'équation $g(x) = 8$ a deux solutions, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

On en déduit que les antécédents de 8 par la fonction g sont $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

Exercice 4 : Le graphique ci-contre représente la fonction f définie par $f(x) = (x - 1)^2 - 3$.

Par lecture graphique

1- Les images des nombres 1 et – 2 par f sont $f(1) \approx -3$ et $f(-2) \approx 6$

2- Les antécédents par f du nombre – 2 sont $x = 0$ et $x = 2$ car les points de coordonnées $(0\,;-2)$ et $(2\,;-2)$ sont sur $\mathscr{C}$.

3- Le nombre – 3 admet 1 pour antécédent car le point de coordonnées $(1;-3) \in \mathscr{C}$.

*Résolution par le calcul

1- Calcul de l'image par f de 0 et de 2 :
$f(0) = (0 - 1)^2 - 3 = -2$ et $f(2) = (2 - 1)^2 - 3 = -2$
On retrouve les antécédents de -2 par f.

2- **a)** Rechercher les antécédents par f de 13 revient à résoudre l'équation $f(x) = 13$
C'est-à-dire $(x - 1)^2 - 3 = 13$
Soit $(x - 1)^2 - 16 = 0$.

b) Pour tout nombre x, en développant le membre de gauche, on obtient :
$(x - 1)^2 - 16 = (x - 1)(x - 1) - 16$
$(x - 1)^2 - 16 = x^2 - x - x + 1 - 16$
$$(x - 1)^2 - 16 = x^2 - 2x - 15$$
Pour tout nombre x, en développant le membre de droite, on obtient :
$(x - 5)(x + 3) = x^2 + 3x - 5x - 15$
$(x - 5)(x + 3) = x^2 - 2x - 15$
Pour tout nombre x, on constate que les deux expressions sont égales. On peut donc en conclure que pour tout nombre x
$$(x - 1)^2 - 16 = (x - 5)(x + 3)$$

c) Les antécédents de 13 par f sont obtenus en résolvant $(x - 1)^2 - 16 = 0$; donc, d'après la question précédente, en résolvant : $(x - 5)(x + 3) = 0$.
On reconnait une équation produit nul. Les solutions sont $x = 5$ et $x = -3$.

Exercice 5

On considère une fonction f et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative. Compléter le tableau suivant.

Egalité	Description : image ou antécédent	Point appartenant à $\mathscr{C}$
$f(-2) = -1$	-1 est l'image de -2 par f	(-2 ;-1) $\in \mathscr{C}$
$f(5) = 7$	7 est l'image de 5 par f	$(5;7) \in \mathscr{C}$
$f(4) = -10$	4 est un antécédent de -10 par f	$(4;-10) \in \mathscr{C}$
$f(-3) = 2$	-3 est un antécédent de 2 par f	$(-3;2) \in \mathscr{C}$

Partie E : FONCTIONS AFFINES – FONCTIONS LINEAIRES

Exercice n°1

Parmi ces fonctions, détermine

$f : x \mapsto 4x - 3$

$g : x \mapsto 5 - 2x$

$h : x \mapsto 3x^2 + 5$

$i : x \mapsto 4{,}5x$

$j : x \mapsto -4$

$k : x \mapsto \frac{1}{x}$

a) Celles qui sont affines :

$f : x \mapsto 4x - 3$

$g : x \mapsto 5 - 2x$

$i : x \mapsto 4{,}5x$

$j : x \mapsto -4$

b) Celles qui sont linéaires

$i : x \mapsto 4{,}5x$

c) Celles qui sont constantes

$j : x \mapsto -4$

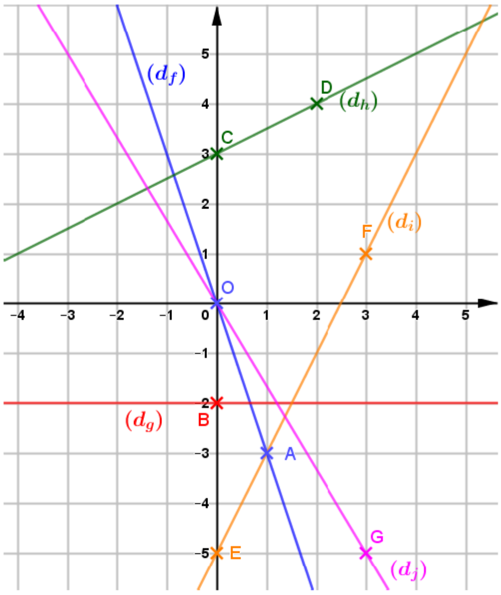
d) Celles qui ne sont pas affines

$h : x \mapsto 3x^2 + 5$

$k : x \mapsto \frac{1}{x}$

Exercice n°2

Représenter les fonctions suivantes en expliquant la démarche et les calculs.



a) $f(x) = -3x$:

f est une fonction linéaire ; elle est représentée par une droite (d_f)passant par l'origine du repère O. On a $f(1) = -3$ donc le point A de coordonnées $(1; -3)$ appartient à la droite (d_f).

b) $g(x) = -2$:

g est une fonction constante représentée par une droite (d_g) parallèle à l'axe des abscisses passant par le point B de coordonnées $(0; -2)$.

c) $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$:

h est une fonction affine ; elle est représentée par une droite (d_h) ; il suffit de déterminer les coordonnées de deux points de cette droite. $h(0) = 3$ et $h(2) = 4$ donc $C(0; 3)$ et $D(2; 4)$ appartiennent à (d_h).

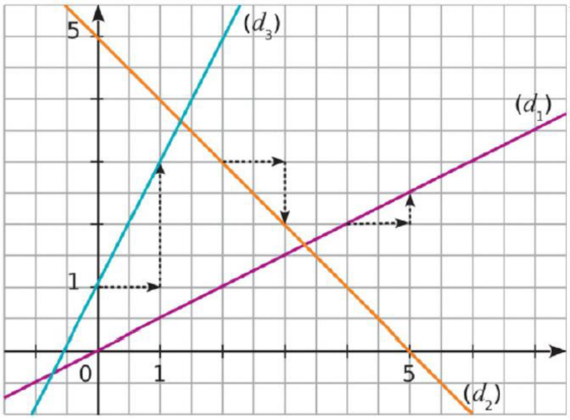
d) $i(x) = 2x - 5$:

i est une fonction affine ; elle est représentée par une droite (d_i) ; il suffit de déterminer les coordonnées de deux points de cette droite. $i(0) = -5$ et *i(3)=1* donc $E(0; -5)$ et $F(3; 1)$ appartiennent à (d_i).

e) $j(x) = -\frac{5}{3}x$:

j est une fonction linéaire ; elle est représentée par une droite (d_j)passant par l'origine du repère O. On a $j(3) = -5$ donc le point G de coordonnées $(3; -5)$ appartient à la droite (d_j).

Exercice n°3
Déterminer graphiquement les fonctions représentées par les droites (d_1), (d_2) et (d_3) ci-contre.



<u>**Explications**</u> : une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine dont la forme générale s'écrit $f(x) = mx + p$ où m (appelé <u>coefficient directeur</u>) et p (appelé <u>ordonnée à l'origine</u>) sont des nombres.

On lit, quand c'est possible, **l'ordonné à l'origine** comme l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées :

Pour (d_1), $p_1 = 0$
Pour (d_2), $p_2 = 5$
Pour (d_3), $p_3 = 1$

On lit, quand c'est possible, **le coefficient directeur** en se plaçant sur un point à coordonnées entières de la droite ; on se décale d'une unité dans le sens positif des abscisses (à droite), puis en « rejoignant » la droite selon l'axe des ordonnées : ce décalage, muni d'un signe, est alors le coefficient directeur.

Pour (d_1), $m_1 = 0,5$
Pour (d_2), $m_2 = -1$
Pour (d_3), $m_3 = 2$

On obtient donc :
Pour (d_1), $f_1(x) = 0,5x$
Pour (d_2), $f_2(x) = -x + 5$
Pour (d_3), $f_3(x) = 2x + 1$

Exercice 4
Déterminer la fonction linéaire associée à chacune des expressions suivantes.
Rappel :

- Augmenter une valeur de $t\%$, c'est multiplier cette valeur par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$
- Diminuer une valeur de $t\%$, c'est multiplier cette valeur par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$
- Prendre $t\%$ d'une valeur c'est multiplier cette valeur par $\frac{t}{100}$

a) Hausse de 2 % : soit x, la valeur de départ ; modélisons par la fonction linéaire f_a, le calcul de la valeur après la hausse ; $f_a(x) = \left(1 + \frac{2}{100}\right)x$ donc $f_a(x) = 1{,}02x$

b) Baisse de 40 % : soit x, la valeur de départ ; modélisons par la fonction linéaire f_b, le calcul de la valeur après la baisse ; $f_b(x) = \left(1 - \frac{40}{100}\right)x$ donc $f_b(x) = 0{,}6x$

c) Prendre 65 % : soit x, la valeur de départ ; modélisons par la fonction linéaire f_c, le calcul de la valeur ; $f_c(x) = 0{,}65x$

***Exercice 5**
Baisser une quantité de 2 % deux fois de suite revient-il à la baisser de 4 % ?
Soit x, la valeur de départ ; modélisons la situation :
Première baisse : $x \times (1 - 0{,}02)$
Deuxième baisse : $[x \times (1 - 0{,}02)] \times (1 - 0{,}02) = x \times 0{,}98 \times 0{,}98 = x \times 0{,}98^2 = x \times 0{,}960\,4$
Or, baisser une valeur de 4% revient à multiplier cette valeur par $\left(1 - \frac{4}{100}\right) = 0{,}96$.
Comme $0{,}96 \neq 0{,}9604$ alors baisser une quantité de 2 % deux fois de suite ne revient pas à la baisser de 4 %.

***Exercice 6**
Un article coûte 58,40 € après avoir subi une remise de 20 %. Quel était son prix d'origine ?
Baisser une valeur de 20% revient à multiplier cette valeur par $\left(1 - \frac{20}{100}\right) = 0{,}80$.
On ne connait pas la valeur de départ (avant la remise) ; appelons la x.
On a donc l'égalité suivante : $x \times 0{,}80 = 58{,}40$.
En résolvant cette équation, on en déduit : $x = \frac{58{,}40}{0{,}80} = 73$.
L'article coûtait 73€ avant la remise de 20%.